

„Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ – Alltagssprache und Mathematik im Anfangsunterricht zur Stochastik

ALEXANDRA PRECHTL UND NICOLAI VON SCHROEDERS, NÜRNBERG

***Zusammenfassung:** Stochastisches Denken wird zu einem großen Teil durch individuelle Erfahrung beeinflusst, wodurch auch im mathematischen Verständnis wertfreien Begriffen der Stochastik eine individuelle Konnotation zukommt. Die Alltagssprache und deren Semantik unterscheiden sich allerdings deutlich vom Bedeutungsfeld der Fachsprache. Gerade im Anfangsunterricht zur Stochastik, dem häufig ein empirisches Wahrscheinlichkeitsverständnis zu Grunde liegt, ist es von besonderer Relevanz, diese Deutungsunterschiede herauszuarbeiten und sinngemäß zu verwenden. Im Folgenden wird deshalb nach einigen Begriffsdefinitionen exemplarisch die Diskrepanz zwischen Fachsprache und Umgangssprache in der Stochastik aufgezeigt; daraus werden abschließend Konsequenzen für den Unterricht abgeleitet.*

1 Zufall

Nachdem im Statistikerunterricht bereits von „zufälligen Vorgängen“ die Rede war, begegnen Schülerinnen und Schüler in der Regel dem Begriff des Zufalls spätestens in der Wahrscheinlichkeitstheorie im Kontext des empirischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Dort wird er teilweise bei der Definition des „Zufallsexperimentes“ bzw. des „Zufallsversuches“ verwendet, ohne vorher eindeutig definiert worden zu sein. Derartige Definitionen lauten dann so:

„Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, dessen Ergebnis zufällig, also nicht vorhersagbar ist“ (Brandl et al. 2013, S. 214).

„Zufall“ ist als Begriff der Alltagssprache jedem Schüler geläufig (siehe Abschnitt 1.2). Dabei ver-

wundert es nicht, dass Lehrkräfte von übereinstimmenden Begriffsassoziationen seitens der Lernenden ausgehen und ein allgemeingültiges Verständnis voraussetzen (Döhrmann 2004). Etlichen Studien zufolge sind jedoch genau diese Assoziationen nicht einheitlich und harmonisieren infolgedessen auch nicht mit der Verwendung des Begriffs „Zufall“ im Stochastikunterricht (Andelfinger 1983; Bethge 1978). Diesem Problem sollte darum besondere Beachtung geschenkt werden, weil basierend auf diesem stark intuitiv und individuell geprägten Begriff der Aufbau des gesamten Komplexes der schulischen Wahrscheinlichkeitsrechnung erfolgt.

Deshalb erhält die Verwendung der Fachterminologie einerseits und des Alltagssprachgebrauchs andererseits im Anfangsunterricht zur Stochastik aus didaktischer Sicht eine besondere Relevanz.

1.1 Wissenschaftliche Auffassungen von „Zufall“

Der französische Mathematiker und Physiker Pierre Simon de Laplace (1749–1827) bringt den „Zufall“ mit dem menschlichen Erkenntnisstand über Vorgänge in Verbindung. Er nennt Ereignisse dann „zufällig“, wenn der gegebene Bedingungskomplex nicht die Gesamtheit aller Ursachen widerspiegelt (Lindenau und Schindler 1977). Dem Betrachter eines Vorgangs mangelt es an Informationen, sodass nicht alle Einflüsse, die auf den Ausgang des Versuches einwirken, ausreichend beschrieben werden können und somit erscheint die exakte Vorhersage eines Ergebnisses unmöglich.

Hingegen bezeichnet der französische Mathematiker, Wirtschaftstheoretiker und Philosoph Antoine-Augustin Cournot (1801–1877) mit dem Begriff des „Zufalls“ die

„Idee der Verbindung mehrerer Systeme von Ursachen oder Erscheinungen, welche unabhängig voneinander stattfinden“ (Schneider 1989, S. 77).

Mit seiner Interpretation des Zufalls als Merkmal einer Relation zwischen mehreren Ereignissen (und nicht eines einzelnen Ereignisses) erfährt Cournot die Zustimmung anderer Wissenschaftler des 19. und 20. Jahrhunderts wie Henri Poincaré (Mathematiker, theoretischer Physiker und Philosoph, 1854–1912) und Eduard Meyer (Historiker, 1855–1930). Sie bringen den Zufall mit dem Begriff der Kausalreihen in Verbindung. Treffen mehrere solcher Kausalreihen aufeinander, so zeigt sich der „Zufall“ in dem Moment des Schnittpunkts, in dem

„das Eingreifen [der zweiten Kausalreihe] kausal nicht zu begründen ist“ (Meyer 1910, S. 23).

Poincaré beschreibt den Zusammenhang wie folgt:

„Eine sehr kleine Ursache, die wir nicht bemerken, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir nicht übersehen können, und dann sagen wir, der Effekt sei zufällig“ (Neundorf 2009).

Offenbar beruhen die Meinungsverschiedenheiten unter Mathematikern und Philosophen zum Begriff des „Zufalls“ auf der Vieldeutigkeit des Begriffs. Und so verwundert es auch nicht, dass es bisher keine eindeutige, in der Fachwissenschaft verbreitete Definition des Begriffs gibt, auf die man sich bei der Diskussion um dessen „mathematikferne“, alltägliche Bedeutung stützen kann. Das ist aber aus fachmathematischer Sicht gar kein Problem, weil für den Begriff „Zufallsexperiment“ die Bedeutung des Zufalls überhaupt keine Rolle spielen muss:

„Unter einem *Zufallsexperiment* in der Stochastik versteht man reale Vorgänge (Versuche) unter exakt festgelegten Bedingungen, wobei die *möglichen* Ausgänge (Ergebnisse) des Versuchs feststehen, nicht jedoch, welchen Ausgang der Versuch nimmt. Ferner wird angenommen, dass der reale Vorgang (im Prinzip) unter gleichen Bedingungen (beliebig oft) wiederholt werden kann.“ (Kütting und Sauer 2014, S. 89).

Auch diese Beschreibung ist keine Definition im mathematischen Sinne, weil dazu die verwendeten Begriffe wie beispielsweise „Vorgang“ oder „Bedingung“ entweder Grundbegriffe oder aber definierte Begriffe sein müssten. Der deduktive Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung kommt daher ohne Definition des Begriffs „Zufallsexperiments“ aus, auch wenn in Abbildung 1 ein anderer Eindruck erweckt wird. Dort ist die Ergebnismenge nur eine höchstens abzählbare Menge, deren Elemente als Ergebnisse bezeichnet werden.

In anderen Wissenschaftszweigen hingegen, wie beispielsweise der Biologie, der Theologie oder auch der Rechtswissenschaft, existieren jeweils fachwissenschaftseigene Definitionen des „Zufalls“. In der Rechtswissenschaft wird unter Zufall

„ein vom Schuldner i. d. R. nicht zu vertretendes unverschuldetes Ereignis“ (Gabler Lexikon 2017)

verstanden.

1.2 „Zufall“ im Alltag

Der „Große Brockhaus“ führt unter dem Stichwort „Zufall“ folgende Definition an:

„Ein wesentliches Merkmal des Zufalls ist die Regellosigkeit des Auftretens der Ausfälle in einer Versuchsreihe. [Allerdings sei dieses Merkmal für eine genauere Präzisierung des Begriffs ungeeignet], da auch er sich einer strikten mathematischen Definition entzieht“ (Brockhaus 1957, S. 735).

Ob beim „Mensch ärgere dich nicht“ eine Sechse gewürfelt wird oder nicht, fällt im allgemeinen Sprachgebrauch unter „Zufall“. Der Zufall stellt hier ein Geschehnis dar, bei dem eine von mehreren Möglichkeiten eintritt (Barth und Haller 1994). Es dominiert für den Menschen die Vorstellung der Gleichwahrscheinlichkeit der einzelnen Möglichkeiten. Nicht gleichwahrscheinliche zufällige Ereignisse werden infolgedessen auch weniger als zufällig empfunden als solche, denen Gleichwahrscheinlichkeit zugrunde liegt (Walter 1980).

Es wird deutlich, wie schwer die Unterscheidung von Zufall und Wahrscheinlichkeit ist: Eine bestimmte Zahl zu würfeln, unterliegt (dem alltäglichen Verständnis nach) dem Zufall. Zur Bewertung der Aussage, wie hoch der Betrachter die Chancen einschätzt, eine bestimmte Zahl zu würfeln, bedarf es allerdings einer Wahrscheinlichkeitsaussage.

Kollhoff et al. (2014) berichten in ihrer Studie zur Erfassung sprachlicher Einflüsse beim stochastischen Denken jene Dimension des Zufallsbegriffs, die ihn als ein Ereignis beschreibt, das von menschlichem Handeln nicht beeinflusst werden kann. Auf die Frage hin, wie ein Schüler die Chance für das Ereignis einschätzt, eine bestimmte Augenzahl zu würfeln, antwortet dieser:

„Das ist zufällig, man kann ja nicht entscheiden, welche Zahl man würfelt“ (Kollhoff et al. 2014, S. 215).

Vorgänge, die in irgendeiner Art und Weise mit menschlichen Entscheidungen in Verbindung gebracht werden, gelten dabei als nicht zufällig, wie beispielsweise die Weite, die von einem trainierten Sportler beim Weitsprung erreicht wird (Sill 1993).

„Ein blindes Huhn findet auch mal ein Korn“. Auch wenn der Begriff „Zufall“ an sich nicht explizit in dieser Redewendung vorkommt, so erscheint der Zufall in dieser Redewendung in Form eines erfahrungsgemäß sehr selten eintretenden Ereignisses. Dem Menschen kann ein Vorhaben gelingen, obwohl ein Erfolg von vornherein nicht erwartet wurde bzw. dem erfolgreichen Eintreten eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit zugesprochen wurde. Diese These wird durch eine weitere Redewendung gestützt: Wer sich „zufällig begegnet“ sei, hat sich nicht verabredet und ein Aufeinandertreffen war nicht zu erwarten.

Häufig ist in diesem Zusammenhang auch das Zusammentreffen zweier Vorgänge gemeint. So betrachtet der Mensch es als zufällig, genau in dem Moment an einem Haus vorbeizulaufen, in dem ein Dachziegel vom Dach fällt. Je nach Ausgang des Vorgangs wird er dieses als Glück bzw. als Unglück interpretieren. In diesem Kontext fällt auch des Öf-

teren die Bezeichnung eines Resultats als „dummer Zufall“ (Duden 2013, S. 1988).

Der Zusammenhang zwischen der pessimistischen Unsicherheit in Bezug auf eine Folgesituation wird besonders im französischen Sprachgebrauch deutlich, wie man in Auvrai und Wirth (2015) nachlesen kann: Die Übersetzung des Wortes „zufällig“ lautet „par accident“, während „accident“ das französische Wort für „Unfall“ ist (S. 18). Hingegen erfolgt die lateinische Übersetzung von „accidere“ durch die Verben „geschehen“, „passieren“, „sich ereignen“ und „vorfallen“, welche in der Mehrheit wertfrei und neutral sind, während „zustoßen“ (S. 23) eine eher negative Konnotation zufällt.

Des Öfteren wird mit dem Begriff „Zufall“ allerdings auch positive statt negative Unsicherheit ausgedrückt. Der tatsächlichen Realisierung eines Vorgangs wird hoffnungsvoll entgegengeblickt, die Ungewissheit über das Eintreffen eines möglichen Ausgangs wird positiv bewertet (Steinbring 1991). Die Formulierung „Es könnte ja zufällig sein, dass ...“ zeugt sowohl von hoffnungsvoller Erwartung als auch von Unsicherheit über das in der Zukunft Geschehene. So schätzt in der bereits erwähnten Untersuchung zu stochastischem Denken ein Schüler die Aussicht, eine bestimmte Augenzahl zu würfeln, als zufällig ein, „das kommt darauf an, wie viel Glück man hat“ (Kollhoff et al. 2014, S. 215).

Im gleichen Maße wie bei der negativen Konnotation spielt dabei die subjektiv emotionale Bewertung des Vorgangs eine wichtige Rolle.

Eine weitere Dimension des „Zufalls“ zeigt sich im Wirken des Schicksals. Welchen Ausgang das Leben oder nur ein Lebensabschnitt auch hat, sei durch äußere Bedingungen bestimmt und für den Menschen als solches hinzunehmen. Redewendungen wie „Der Zufall kam uns zu Hilfe“ oder „Das kann doch kein Zufall sein“ spiegeln dieses Verständnis wider. In Borovcnik, Götz und Maaß (2018) wird diese Dimension am Beispiel des zufälligen Vorbeifahrens eines Radfahrers modelliert und damit ein interessanter, unterrichtlicher Zugang zu Zufall und Wahrscheinlichkeit aufgezeigt.

Eine religiöse Interpretation liegt dann vor, wenn nach Ansicht der Gläubigen das Leben von Gott oder anderen höheren Mächten bestimmt wird. Die große Gemeinsamkeit der Weltreligionen besteht in dem Konsens, dass der göttliche Wille letztlich unergründlich bleibt und daher der Mensch gut daran tut, wenn er sich in das Schicksal fügt (Hausten, Kehnsherper und Mochmann 1998). Der Lebenslauf ist aufgrund Gottes Willens also nicht vorherzusagen

und stets mit Ungewissheit zu erwarten. Hier haftet die theologische Deutung des Zufallsbegriffs an, die nicht fern von deterministischen Betrachtungsweisen anzusiedeln ist.

2 Diskrepanz zwischen Fach- und Alltagssprache

Im vorangegangenen Abschnitt wurde deutlich, wie vielseitig die Interpretation eines einzigen Begriffs ausfallen kann. Beim „Zufall“ handelt es sich aber um kein mathematisches Konstrukt. Anders sollte es sich aber mit einem mathematisch definierten Fachwortschatz verhalten.

In der Stochastik existieren viele Begriffe, die meist auf einer axiomatisch festgelegten Definition basieren wie beispielsweise „Wahrscheinlichkeit“ oder „wahrscheinlich“, ein „sicheres“ oder ein „unmögliches Ereignis“.

Kolmogorow (1903–1987) gelangte 1933 zu folgender Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (siehe Abb. 1). In Form eines Postulats wird jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zugeschrieben, ohne bereits festzulegen, wie groß diese ist. „Wahrscheinlichkeit“ stellt zunächst einen weiter nicht festgelegten Grundbegriff dar.

Sei $\Omega \neq \emptyset$ die (höchstens abzählbare) Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes. Eine auf der Ergebnismenge $P(\Omega)$ definierte Funktion $P: P(\Omega) \rightarrow [0;1]$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls gilt:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A) \geq 0$ für alle $A \subseteq \Omega$
3. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für alle $A, B \subseteq \Omega$

Das Paar (Ω, P) heißt dann *Wahrscheinlichkeitsraum*. Für das Ereignis $A \subseteq \Omega$ heißt $P(A)$ *Wahrscheinlichkeit* von A .

Die zugehörige Funktion $p: \Omega \rightarrow [0; 1]$ mit $p(\omega) = P(\{\omega\})$ heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion*.

Die Menge der Vereinigung aller Elementarereignisse nennt man das *sichere Ereignis*.

Die leere Menge \emptyset oder $\{\}$ nennt man das *unmögliche Ereignis*.

Abb. 1: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (Richter 1966, S. 60; Brokate et al. 2016, S. 712)

Hier zeigt sich aber auch ein Charakteristikum der Mathematik: Nur jene Aussage, die mittels einer dieser axiomatischen Definitionen und – falls notwendig – mithilfe bereits bewiesener Zusammenhänge eindeutig bewiesen werden kann, gilt als wahr und rechtfertigt die weitere Verwendung des Sinngehalts der Aussage.

An der Stelle, an der diese Begriffe in der Alltagssprache gebraucht werden, offenbart sich im Allgemeinen folgendes Dilemma: Anders als in der Mathematik stellt der Wahrheitsgehalt einer Aussage in der Umgangssprache keine notwendige Voraussetzung für deren Verwendung im Sprachgebrauch dar.

2.1 Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit

Ganz anderer Natur ist der Versuch, den „nicht mathematischen“ Zufall zu quantifizieren und damit die Chancen und Risiken im Alltag abzuwägen und einzuschätzen. Der Mensch stellt sich und seiner Umgebung in diesem Zusammenhang des Öfteren Fragen nach der Größe der Wahrscheinlichkeit: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es am kommenden Sonntag regnen wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland im Jahr 2018 Fußball-Weltmeister wird?

Unter Berücksichtigung eines Bayesschen Wahrscheinlichkeitsbegriffs, nach der eine Wahrscheinlichkeit die Plausibilität eines Ereignisses bei gegebenen Informationen beschreibt (Spandaw 2013), wären diese Fragen adäquat zu beantworten. Im Sinne einer empirischen Sichtweise (und damit von Relevanz vor allem für den Anfangsunterricht) darf in diesem Kontext allerdings nicht von „Wahrscheinlichkeit“ die Rede sein: Die Situationen sind einmalig, die übliche Interpretation als Näherung von relativen Häufigkeiten eines Ereignisses eines zuvor beschriebenen Zufallsexperiments greift hier nicht. Entweder wird es regnen oder nicht, Deutschland gewinnt die Weltmeisterschaft oder nicht. Die gefragten Chancen sind entweder 0 oder 1, was jedoch – wenn eine Übertragung auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff vorgenommen werden würde – den Wahrscheinlichkeiten des sicheren bzw. des unmöglichen Ereignisses entspricht (Spandaw 2013, S. 41).

Zumindest die unter gleichen Voraussetzungen wiederholbare Durchführbarkeit würde das Vorliegen eines Zufallsexperiments und somit solche Fragestellungen nach Wahrscheinlichkeiten im Kontext des empirischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs legitimieren. Die Frage „Wie wahrscheinlich ist es, dass im Juni ein Schwarzfahrer, der ein Zebra mit sich führt, in der U-Bahn kontrolliert wird?“ erscheint auf den ersten Blick zwar als schwer überprüfbar, sie offenbart jedoch recht offene Voraussetzungen, die ein mehrmaliges Durchführen/Beobachten des Experimentes grundsätzlich ermöglichen würden.

Das angesprochene Ausdrucksdilemma – die Frage nach der Wahrscheinlichkeit – lässt sich leider nicht so einfach umgehen. Selbst die Frage nach „Wie groß ist die Chance, ...“ grenzt eine mathematische Interpretation im Kontext von Wahrscheinlichkeiten nicht aus. Die Chance kann als Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses und dessen Gegenereignis definiert werden und findet sich in geläufigen Redewendungen wie beispielsweise „fifty-fifty Chance“ wieder. Die Frage nach der Größe der Chance erfordert damit

nicht nur gegebenenfalls ein intuitives Einschätzen der Wahrscheinlichkeit des gefragten Ereignisses, sondern gleichzeitig auch noch das Bestimmen des Verhältnisses mit der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses.

Solange diese mathematische Interpretation aber nicht bekannt ist, und damit die alltagssprachliche Verwendung des Wortes „Chance“ im Sinne von „Aussicht auf Erfolg“ (Duden 2013) nicht gleich einen Übertritt in die Welt der Wahrscheinlichkeit erzwingt, kann mit einer derartigen Formulierung zumindest vorerst nach einer quantitativen Einschätzung des Eintretens eines Ereignisses gefragt werden. Deshalb empfiehlt es sich, im Anfangsunterricht zur Wahrscheinlichkeit den Begriff „Chance“ zu verwenden, bis der Begriff der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses definiert worden ist.

2.2 Das alltägliche „wahrscheinlich“

„Alle Versuche den [alltäglichen] Wahrscheinlichkeitsbegriff zu definieren, sind bis heute gescheitert“ (Van der Waerden 1951, S. 69).

Ähnlich verhält es sich mit dem dazugehörigen Adjektiv „wahrscheinlich“.

Das Bedeutungswörterbuch „Duden“ wagt zumindest den Versuch und ordnet dem Begriff „wahrscheinlich“ folgende Bedeutung zu: „ziemlich gewiss; mit ziemlicher Sicherheit in Betracht kommend“ (Duden 2013, S. 1885). Der Wahrig-Brockhaus (2012, S. 1047) erteilt dem Begriff „wahrscheinlich“ den Sinngehalt von „vermutlich“ und „es ist anzunehmen, dass ...“. Die am meisten verbreitete umgangssprachliche Verwendung knüpft an die Charakterisierung des Dudens an: In Form eines Adverbs wird „wahrscheinlich“ im alltäglichen Sprachgebrauch meist die gleiche Bedeutung wie „sehr wahrscheinlich“ zugesprochen: „Es wird morgen wahrscheinlich regnen“.

Im Allgemeinen lässt sich feststellen, dass alle Aussagen zur Wahrscheinlichkeit Folgendes gemeinsam haben: Zu einer vorgegebenen Situation erscheint das Eintreffen mehrerer Folgesituationen möglich, die sich gegenseitig voneinander abgrenzen. Die Behauptung, aus Situation A folge vermutlich Situation B, wird durch ihren Vertrauensgrad mittels einer Wahrscheinlichkeitsaussage gewichtet (Richter 1966). Dabei ist festzustellen, dass lediglich qualifiziert und (noch) nicht quantifiziert wird.

Die Bewertung einer prognostizierten Situation, Entwicklung o. ä. mit „wahrscheinlich“ bedeutet im Alltag, dass es verschiedene Parameter gibt, die das Eintreffen eines Ereignisses beeinflussen. „Wer mit 50 km/h gegen eine Betonwand fährt, ist wahrscheinlich tot“. Fehlende Parameter sind beispielsweise Aussa-

gen über den Sicherheitsgurt, Airbag, usw., während eine unzweifelhafte Prognose dagegen auf Parametern aufbaut, die ein Folgeereignis zwingend notwendig machen. Auf der Grundlage von Erfahrung, Wissen und Hoffnung werden den unterschiedlichen Ereignissen Bewertungen zugeteilt, die sich zwischen „praktisch unmöglich“ und „praktisch sicher“ befinden.

Gelegentlich werden Steigerungen verwendet, um den festen Glauben an das Kommende zu verstärken: „Diese US-amerikanische Komödie aus Hollywood endet höchstwahrscheinlich wieder mit einem Happy End“. In dieser Aussage wird ausgedrückt, dass nur noch verschwindend geringe Zweifel an der Richtigkeit der Vorhersage bestehen. In diesem Fall ist nicht eindeutig ersichtlich, ob sich die gestellte Bedingung jemals als wahr oder falsch offenbart. Auf welche Art und Weise sich die jeweiligen Folgesituationen voneinander abgrenzen, ist also noch nicht vollständig definiert. Dazu bedarf es einer genaueren Beschreibung der Kriterien, welche z. B. den Begriff „Happy End“ eindeutig festlegen.

Zusätzlich werden in vielen Redewendungen Abstufungen von Wahrscheinlichkeiten formuliert, um die persönliche Überzeugung vom Eintreten eines bestimmten Ereignisses auszudrücken. Kütting (1994) führt folgende Skala an, welche die umgangssprachlichen qualitativen Begriffe zur Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten mit quantitativen Angaben in Beziehung setzt.

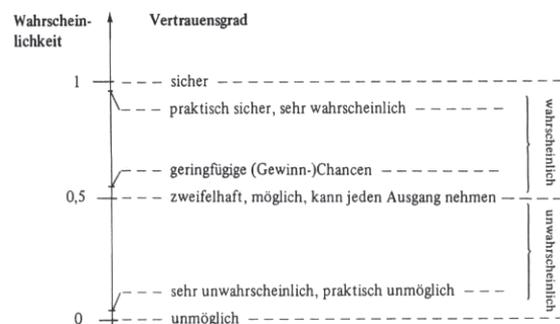


Abb. 2: Kategorien zum Beschreiben und Schätzen von Wahrscheinlichkeiten nach Kütting (1994, S. 36)

Ziel ist es, die so benannten Wahrscheinlichkeiten in ihrer Bedeutung zu verstehen, sie also mit mathematischen Mitteln näherungsweise auszudrücken und damit vergleichbar zu machen. Mit der Präzisierung und Skalierung qualitativer Beschreibungen geht eine „Normierung des Erwartungsgefühls“ (Krüger et al. 2015, S. 72) einher, wobei die Einordnung den Vertrauensgrad in das Eintreten einer Situation widerspiegeln soll. Die markierten Einschätzungen des Erwartungsgefühls bezüglich der Begriffe „wahrscheinlich“

und „unwahrscheinlich“ verteilen sich auf Intervalle, während lediglich die Bezeichnungen „sicher“ und „unmöglich“ einem genauen Punkt auf der Skala zugeordnet werden. Das Gleiche gilt für die 50-Prozent Chance. Diese wird in der Umgangssprache auch mit „fifty-fifty“ (S. 77) bezeichnet und ist in Abbildung 2 zwischen den Intervallen der wahrscheinlichen und unwahrscheinlichen Aussagen verankert.

In Bezug auf Abbildung 2 sei anzumerken, dass die Einteilung der Intervalle keiner universellen Richtlinie folgt, denn nicht in jedem Fall bezieht man sich mit dem Begriff „wahrscheinlich“ auf ein Ereignis mit einer Wahrscheinlichkeit von über 0,5. Auch Kütting (1994) stellt in seiner Skala also nur eine Richtung der quantitativen Zuordnung der Begrifflichkeiten dar, die weit verbreitet, aber nicht in Jedermanns individueller Vorstellung so verankert ist.

Es wird deutlich, dass die Klassifizierung von Ereignissen als „wahrscheinlich“ in den meisten Fällen dann erfolgt, wenn der Betrachter diesem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 und weniger als 100 % zuspricht (Kütting 1994, S. 36). Dem schließen sich die dem Begriff zugeschriebenen Bedeutungen des Dudens an. Auch der Philosoph Immanuel Kant (1724–1804) hat einst festgestellt:

„Wahrscheinlich heißt dasjenige, was für wahr gehalten, mehr als die Hälfte der Gewissheit [...] auf seiner Seite hat“ (Kant 1838, S. 183).

Analog gilt für das „unwahrscheinliche“ Eintreten einer Folgesituation: Aussagen wie „Es ist unwahrscheinlich, dass heute noch die Sonne scheint“ oder „Es ist unwahrscheinlich, dass der Bus pünktlich kommt“ drücken erhebliche Zweifel am Eintreten der genannten Situation aus. Subjektiv werden diese Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten belegt, die unter 50 % liegen. Liegt die Wahrscheinlichkeit nahe der Null, also nahe dem Nichteintreffen eines Ereignisses, so wird es als „sehr unwahrscheinlich“ bezeichnet (Kütting, 1994). Welche Prozentangaben allerdings für „sehr wahrscheinliche“ oder „höchstwahrscheinliche“ Ereignisse gelten, ist im alltäglichen Sprachgebrauch nicht festgelegt. Es ist anzunehmen, dass sie bei mindestens 80 Prozent liegt, jedoch erweist sich diese Zuordnung als äußerst individuell. Zum einen hängt sie also von der Person ab, die den persönlichen Vertrauensgrad in das Eintreffen eines Ereignisses ausdrücken möchte, zum anderen von der betrachteten Situation.

In einer Studie zur subjektiven Einschätzung und Kommunikation von Wahrscheinlichkeiten erlangt Reuband (2002) folgende Erkenntnis: Befragte, die das Ereignis beim Bahnfahren kontrolliert zu werden als „sehr wahrscheinlich“ einschätzen, meinen

in der Regel, es käme in der Mehrheit, genauer in 65 % der Fahrten zu einer Kontrolle. „Eher wahrscheinlich“ wird der Studie zufolge einer numerischen Angabe von ca. 35 % zugeordnet. Unter den Befragten schließlich, welche die Wahrscheinlichkeit als „gering“ klassifizieren, liegen die entsprechenden Werte bei 10 bzw. 13 %. Was die Größenordnung betrifft, vor allem die Geringfügigkeit der Unterschiede zwischen den Begriffen „eher unwahrscheinlich“ und „sehr unwahrscheinlich“, fielen die Abstände der prozentualen Angaben den Autoren zufolge weniger groß aus als erwartet.

Als Fazit lässt sich ziehen, dass im Vergleich zum verifizierbaren, also stets auf seine Richtigkeit prüfbareren, mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, im Alltag offensichtlich Wahrscheinlichkeitsaussagen getroffen werden, denen diese Eigenschaft nicht immer zugesprochen werden kann (Richter 1966).

Die Mathematik geht aber sogar noch einen Schritt weiter. Streng genommen gibt es nur eine adjektivistische Verwendung (und dies auch nur in einem eingeschränkten Kontext) des Begriffs „wahrscheinlich“. Kolmogorow lässt die Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (eines Ereignisses)?“ und damit nach dem Wahrscheinlichkeitsmaß zu. Als alternative Formulierung wäre denkbar „Wie wahrscheinlich ist das Eintreffen des Ereignisses?“ Aussagen, die beispielsweise „nur“ den Grad einer Überzeugung ausdrücken und nicht explizit die Angabe des Werts der Wahrscheinlichkeit einfordern, sind im mathematischen Sinne nicht zulässig.

Kurz erwähnt soll hier noch werden, dass die Verwendung der Ordnungsrelation „ist wahrscheinlicher als“ unproblematisch ist. In der Umgangssprache als auch der Fachsprache stellt es zwei Wahrscheinlichkeitsaussagen in Beziehung zueinander. In der Umgangssprache wird dabei meist nur auf qualitative Einschätzungen zurückgegriffen. Die Kurzform wie beispielsweise „Es ist wahrscheinlicher, dass es regnet“ impliziert dabei den Vergleich mit dem Gegenereignis „es regnet nicht“.

2.3 „Sicher“ als Ausdruck von Zweifellosigkeit

Bromba (2009) deutet den Begriff „Sicherheit“ als einen elementaren und unersetzlichen Begriff aus der Umgangssprache, der in seiner vielseitigen Verwendung des Öfteren widersprüchlich und leichtfertig gebraucht wird. In manchen wissenschaftlichen Disziplinen wurde deshalb bevorzugt auf eine Definition dieses Begriffs gänzlich verzichtet und der Gebrauch

anderer Termini wie „Risiko“ oder die Unterteilung in „Safety“ und „Security“ bevorzugt (Bromba 2009, Abschnitt 2.4).

Neben weiteren Bedeutungen, die Sicherheit im Zusammenhang mit Risiko, Gefahr oder Schutz in Verbindung bringen, führt Duden (2013, S. 1539) unter dem Stichwort „sicher“ folgende Synonyme an: „höchstwahrscheinlich, mit ziemlicher Sicherheit, gewiss, sicherlich, ohne Zweifel“. Diese repräsentieren Bereiche, in deren Kontext das Wort umgangssprachlichen Gebrauch findet und welche eine große Bedeutungsspanne des Begriffs aufweisen.

Die Bedeutungsspanne zeigt, dass die alltagsprachliche Bedeutung für die mathematische Beschreibung eines eng, präzise umrissenen Bereichs eigentlich untauglich ist. Wer auf einer Skala von 1–10 ausdrücken will, dass das Eintreffen eines Ereignisses als sicher gilt, der wählt den Wert 10. Dass eine Steigerung nicht mehr möglich ist, lässt sich auch gut an alltäglichen Redewendungen wie „etwas ist todsicher“ festmachen.

Die im Duden (2013) aufgeführte Zweifellosigkeit hinsichtlich des Eintretens eines Ereignisses zeigt sich beispielsweise in der Redewendung „So sicher wie das Amen in der Kirche“. Wer das sagt, meint damit: Darauf kann man sich verlassen, „das ist ganz gewiss“ (S. 41), denn einen Gottesdienst ohne das „Amen“ als Abschluss gibt es nicht. In diesem Fall stimmen die inhaltlichen Aussagen der mathematischen und umgangssprachlichen Sicherheit überein. Diese These wird ebenfalls durch die im „Wörterbuch der Redewendungen“ des Duden aufgeführte Formulierung „so sicher sein, wie zwei mal zwei vier ist“ (S. 276) gestützt.

Weit verbreitet ist jedoch auch die Verwendung im Sinne von „höchstwahrscheinlich“. Wer ein Ereignis als „höchstwahrscheinlich“ prognostiziert, der will einen Irrtum nahezu ausschließen, sich gleichzeitig aber auch für den Fall, dass das Ereignis vollkommen unerwartet aber doch nicht eintrifft, absichern. Die Tatsache, dass in der Umgangssprache die beiden Begriffe „sicher“ und „höchstwahrscheinlich“ synonym verwendet werden, unterstützt die These, es existiere ein Konflikt zwischen Alltagssprachgebrauch und mathematischem Verständnis. Im naturwissenschaftlichen Sinne wird der Sicherheit eine Wahrscheinlichkeit von 100 Prozent zugordnet, während dies in sprachlichen Gepflogenheiten nicht zwingend der Fall ist.

Das „sichere Ereignis“ muss als Grenzfall der Wahrscheinlichkeit betrachtet werden und wie in Abbildung 2 ersichtlich nicht nur als relativ höchste Abstufung im Vergleich zu den anderen Begriffen, sondern mit der absolut größten Wahrscheinlichkeit von 100

Prozent bewertet werden. Beharrt man auf dieser Aussage, so lässt dies übrigens keinen Komparativ wie „sicherer“ zu, der in der Alltagssprache jedoch Verwendung findet.

Im mathematischen Sinne inkorrekt beschreibt der Mensch in der Umgangssprache auch jenes Ereignis als „sicher“, dass bei unendlich oft wiederholtem Werfen eines Würfels irgendwann eine gerade Zahl gewürfelt wird (Richter, 1966). Die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten dieses Ereignisses ist so verschwindend gering, dass es oftmals nicht einmal mehr als höchstwahrscheinlich sondern als „sicher“ klassifiziert wird.

2.4 Begriffsbedeutungen von „möglich“ und „unmöglich“

Zuletzt erscheinen bei der Normierung des Erwartungsgefühls noch die folgenden Adjektive: Dem Begriff „möglich“ schreibt der Duden (2013) folgende Bedeutungen zu:

„aufgrund der bestehenden Zusammenhänge [...] ausführbar, erreichbar, zu verwirklichen, denkbar, infrage, in Betracht kommend“ (S. 1160).

Sie stehen im Einklang mit der alltäglichen Verwendung des Begriffs „möglich“: Die Wahrscheinlichkeit besteht, dass eine bestimmte Situation eintreten kann. „Es ist möglich, dass es heute noch schneit“ bedeutet nichts Anderes als „Es kann noch schneien, muss es aber nicht“.

Im Vergleich zu all den anderen Begrifflichkeiten, die zur quantitativen Beschreibung stochastischer Gegebenheiten herangezogen werden, stellt die Bezeichnung „möglich“ diejenige dar, die am wenigsten wertgebunden ist, oder, mit anderen Worten, das größte Intervall umfasst: Jedes Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 liegt, ist im alltäglichen Sprachgebrauch möglich. Es umfasst

„sowohl das Übliche oder Häufige als auch das Unbestimmte, ja Seltene“ (Weichselberger 2001, S. 39).

Das Augenmerk wird insbesondere auf seltene Möglichkeiten gerichtet: „Ich habe alles Mögliche getan“ oder „man sollte alles Mögliche bedenken“ (Duden 2013, S. 1160) drückt aus, dass nicht nur der zu erwartende eintretende Fall bedacht wurde. Auch wenn „möglich“ mit Wahrscheinlichkeitsintervallen interpretiert werden kann, darf dies nicht so verstanden werden, dass „möglich“ einer fachwissenschaftlichen Definition entspricht. „Möglich“ wird in der Fachwissenschaft wie im Duden definiert verwendet. Ein mögliches Ereignis verdeutlicht nur, dass es ein denkbare Ereignis ist, damit aber keine Wahrscheinlichkeitsaussage verbunden wird.

Die Wertungebundenheit trifft jedoch nicht für die Unmöglichkeit eines Ereignisses zu. Der alltägliche Sprachgebrauch will damit das sichere Erwartungsgefühl ausdrücken, dass eine bestimmte Folgesituation nicht eintreten wird. „Praktisch unmöglich“ bedeutet dann im analogen Umkehrschluss „mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit“ (Richter 1966). Die Skala aus Abbildung 2 ist also rein intuitiv. Fachwissenschaftlich wird in der Stochastik der Begriff „unmöglich“ als Konstrukt für „unmögliches Ereignis“ verwendet und beschreibt damit ein Ereignis, das nie eintreffen kann und damit eine Wahrscheinlichkeit von Null zugewiesen bekommt.

3 Gegenüberstellung der Adjektive

Tabelle 1 fasst die Erkenntnisse bezüglich der angesprochenen Adjektive zusammen. Auf die Komparationsformen wird dabei nicht weiter eingegangen. Die Wahrscheinlichkeiten in der Spalte „Umgangssprachliche Verwendung“ sind in Prozent angegeben. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass auch im Alltag numerische Angaben meist in Prozent erfolgen. Die fachsprachliche Graduierung der Wahrscheinlichkeiten hingegen erfolgt gemäß der Fachliteratur durch die Einordnung im Intervall zwischen Null und Eins.

4 Irritierende, falsche oder unverständliche Formulierungen in Medien

Fehlinterpretationen sind natürlich nicht nur auf den Unterricht beschränkt. Auch von den Medien und der Öffentlichkeit werden sowohl gegebene Statisti-

ken, also numerische Werte, also auch verbalisierte Wahrscheinlichkeitsabstufungen oft falsch interpretiert oder angewendet, unabhängig von Informationen oder Daten, auf denen die Berechnungen basieren, und auch unabhängig davon, auf welche Art und Weise Wahrscheinlichkeiten von Forschern ermittelt werden. Das Kernproblem liegt darin, dass die Wahrscheinlichkeit oft nicht im Einklang mit der persönlichen Intuition steht und somit sehr leicht der Gefahr unterliegt, richtige Schlussfolgerungen durch intuitive Vorstellungen verzerren zu lassen.

4.1 „duplo, die wahrscheinlich längste Praline der Welt“

Vielleicht, irgendwo ganz weit weg, dort, wo sich Hase und Igel „Gute Nacht“ sagen, dort gibt es vielleicht eine Praline, die noch ein paar Zentimeter länger ist als „duplo, die wahrscheinlich längste Praline der Welt“ (Ferrero Deutschland 2017). Dieses Bild ist es, welches der Werbeslogan zu vermitteln versucht. Die Mitarbeiter von Ferrero haben diese Praline allerdings nicht auftreiben können und so lange könne sich der Kunde damit zufriedengeben, in „duplo“ die längste Praline der Welt gefunden zu haben.

Der unworbene Konsument kann dem Unternehmen entgegenhalten, dass es mit Sicherheit längere Pralinen als diesen 11,25 cm langen Schokoriegel aus Vollmilchschokolade mit einer Nougat-Waffelfüllung gebe. Im mathematischen Sinne gesehen ist jegliche Diskussion im Hinblick auf die Länge der Süßigkeit jedoch vollkommen unbegründet. Den

Begriff	Umgangssprachliche Verwendung	Fachsprachliche Verwendung
„wahrscheinlich“	Es wird im Allgemeinen versucht, einzelne numerische Wahrscheinlichkeiten in ein kategoriales System einzuordnen. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses liegt häufig (je nach Kontext und Betrachter) zwischen 50 und 100 Prozent.	Nur in Verbindung mit der Frage nach der Größe einer Wahrscheinlichkeit: „Wie wahrscheinlich ist ...?“
„höchstwahrscheinlich“	Der erhöhte Vertrauensgrad in eine Folgesituation wird betont. Es bestehen nur geringe Zweifel am „Nichteintreten“ des Ereignisses.	Keine fachsprachliche Definition
„unwahrscheinlich“	Der Betrachter hat erhebliche Zweifel am Eintreten des Ereignisses. Die numerische Wahrscheinlichkeit ist größer als Null und häufig kleiner als 50 Prozent	Keine fachsprachliche Definition
„sicher“	Es wird Gewissheit über das Eintreten eines Ereignisses ausgedrückt. Synonym können auch die Begriffe „höchstwahrscheinlich“ und „zweifello“ verwendet werden. Die Gewichtung mit einer numerischen Wahrscheinlichkeit liegt im oberen Bereich der Wahrscheinlichkeitsskala, aber nicht zwangsläufig bei 100 Prozent.	Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines sicheren Ereignisses beträgt Eins.
„möglich“	Nichteintreten eines Ereignisses ist ausgeschlossen. Es erfolgt nur geringfügig eine Gewichtung des Vertrauensgrades (selbst umgangssprachlich unwahrscheinliche Ereignisse werden als „möglich“ betrachtet).	Keine fachsprachliche Definition.
„unmöglich“	Der Betrachter hat das sichere Erwartungsgefühl des „Nichteintretens“ einer Folgesituation.	Nur in Kombination als „unmögliches Ereignis“. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des unmöglichen Ereignisses beträgt Null.

Tab. 1: Verwendung stochastischer Begriffe hinsichtlich ihres fachmathematischen und alltäglichen Sprachgebrauchs

vorangegangenen Überlegungen zufolge bedeutet der Werbeslogan allenfalls, dass „duplo“ die längste Praline der Welt sein kann, aber auf keinen Fall sein muss. Nicht einmal die Forderung zu den längsten 50 Prozent zu gehören ist erforderlich.

An diesem Beispiel zeigt sich, dass mathematische Begriffe ohne Rücksicht auf ihre eigentliche Bedeutung benutzt werden. Das wissen vermutlich auch die Konsumenten und dennoch lassen sie sich von solchem missverständlichen Gebrauch täuschen.

Sämtliche Argumente über den Wahrscheinlichkeitsbegriff in diesem Kontext werden jedoch hinfällig, zieht man die Tatsache in Betracht, dass „duplo“ überhaupt keine Praline ist. Nach der Definition des deutschen Lebensmittelrechts ist eine Praline ein „Erzeugnis in mundgerechter Größe“ (Bundesministerium der Justiz und für Verbraucherschutz 2003, S. 5), das ausschließlich Schokolade und bzw. oder Inhaltsstoffe wie Nougat und Nüsse enthalten darf. „Duplo“ ist allerdings ein mit Schokolade umhüllter Waffel-/Kekskern und Gebäck ist per Definition kein Bestandteil einer Praline.

Da der Konzern die Aussage über die längste Praline nicht als Fakt darstellen kann und darüber hinaus nicht Gefahr laufen will, als völlig unglaubwürdig abgestempelt zu werden, fügte er den Begriff „wahrscheinlich“ in den Slogan ein. Damit wurde ein eingängiger Werbespruch kreiert, der bei den Adressaten gewissermaßen dauerhaft abgespeichert wurde, so dass es zu dem erwünschten „Wiedererkennungswert“ kommen konnte.

4.2 „Pentagon erklärt IS-Chefhacker ...“

Eine Verzerrung der Lesermeinung könnte ein Artikel des Onlinemagazins „Telepolis“ im August 2015 bewirkt haben. In einem Bericht mit dem Titel „Pentagon erklärt IS-Chefhacker für wahrscheinlich tot“ (Mühlbauer 2015) schreibt der Journalist Peter Mühlbauer, dass Junaid Hussain durch einen Drohnenangriff auf eine Tankstelle vorsätzlich getötet worden sein soll. Dass es sich dabei lediglich um vage Vermutungen handelt, denen die Bestätigung durch verlässliche Quellen fehlt, und somit keineswegs mit absoluter Gewissheit der Tod des Chefhackers anzunehmen sei, erkennt nur der bewusst aufmerksame Leser.

Wer mit den stochastischen Begrifflichkeiten richtig umzugehen vermag, wird wissen, dass es „wahrscheinlich tot“ im fachmathematischen Sinne nicht gibt (eine adverbiale Verwendung von „wahrscheinlich“ ist nicht vorgesehen) und umgangssprachlich interpretiert nur bedeutet, dass die Möglichkeit des Todes Hussains bestehe und den Überlegungen aus

Abschnitt 2.2 zufolge die Wahrscheinlichkeit dafür mit mehr als 50 Prozent anzusiedeln sei.

5 Konsequenzen für den Mathematikunterricht

Im Laufe der Genese der deutschen Sprache haben sich Interpretationen wahrscheinlichkeitstheoretischer Begrifflichkeiten etabliert, die mit der mathematischen Definition nicht vollständig übereinstimmen. Es entstehen Irritationen und Fehlvorstellungen hinsichtlich stochastischer Begrifflichkeiten und Konzepte, die nicht zuletzt daher rühren, dass sich deren umgangssprachlicher Gebrauch als sehr „schwammig“ zeigt. Diese Tatsache führt bei dem Versuch, Stochastik zu begreifen, bei vielen Schülern zu Verständnisschwierigkeiten (Krüger et al. 2015). Nach Borovcnik (1992) kann Mathematikunterricht jedoch nur dann seine Wirkung erzielen, wenn das Wechselspiel zwischen Intuition und Mathematik und damit auch zwischen Alltagssprache und Fachsprache vollständig entwickelt ist.

Gerade beim Einstieg in die Welt des Zufalls taucht das Problem auf, dass Schüler auf unreflektierte Art und Weise die Wörter „möglich“, „wahrscheinlich“, „unmöglich“ und „sicher“ verwenden, und auch Lehrkräfte der Versuchung unterliegen, diese umgangssprachlichen Begriffe in den Unterricht zu übernehmen. Dabei ist es von großer Bedeutung, dass vor allem Lehrkräfte einen sicheren Umgang mit den fachsprachlichen Begriffen pflegen und dabei auch in den höheren Jahrgängen immer wieder deutlich zwischen Fach- und Umgangssprache unterscheiden und bewusst den Schülern die Diskrepanzen aufzeigen.

Literatur

- Andelfinger, B. (1983): Umgehen mit dem Zufall – Ein Erfahrungsbericht aus dem Unterricht (Klasse 7, Gymnasium). In: *Stochastik in der Schule* 3(3), S. 19–24.
- Auvrai, F.; Wirth, Ch. (2015): PONS Schülerwörterbuch Klausurausgabe Französisch. Stuttgart: PONS.
- Barth, F.; Haller, R. (1994): Stochastik Leistungskurs. München: Ehrenwirth.
- Bethge, K. (1978): Probleme der Aneignung von Begriffen unter lernpsychologischem und inhaltlichem Aspekt untersucht am Beispiel der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dissertation. Leipzig: Karl-Marx-Universität.
- Borovcnik, M. (1992): Stochastik im Wechselspiel von Intuition und Mathematik. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 10. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
- Borovcnik, M., Götz, S., Maaß, J. (2018): Ein literarischer Zugang zu Zufall und Wahrscheinlichkeit. In: *Stochastik in der Schule* 38(2), S. 2–17.

- Brandl, J.; Eisentraut, Ch.; Schätz, U. (2013): Delta 9, Mathematik für Gymnasien. Bamberg: C.C. Buchner.
- Brockhaus (1957): Der Große Brockhaus, 16. Aufl., Bd. 12. Mannheim: Brockhaus Verlag.
- Brokate, M.; Henze, N.; Hettlich, F.; Meister, A.; Schranz-Kirlinger, G.; Sonar, T. (2016): Grundwissen Mathematikstudium: Höhere Analysis, Numerik und Stochastik. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Bromba, M. (2009): Stochastische Sicherheitstheorie. www.bromba.com/knowhow/Was_ist_Sicherheit.htm. (Zugriff: 6.5.2018).
- Bundesministeriums der Justiz und für Verbraucherschutz (2003): Verordnung über Kakao- und Schokoladenerzeugnisse. www.behrs.de/media/catalog/product/7/5/75_lp.pdf (Zugriff: 6.5.2018).
- Döhrmann, M. (2004): Zufall, Aktien und Mathematik: Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, Bd. 35. Hildesheim: Franzbecker. (Diss. Univ. Bremen).
- Duden (2013): Der Duden in zwölf Bänden: das Standardwerk zur deutschen Sprache, Bd. 11. Redewendungen: Wörterbuch der deutschen Idiomatik, 4., neu bearb. und aktualisierte Aufl.. Berlin: Dudenverlag.
- Ferrero Deutschland (2017): duplo – die wahrscheinlich längste Praline der Welt. www.duplo.de/sortiment.html. (Zugriff: 6.5.2018).
- Gabler Wirtschaftslexikon (o. D.): Zufall. wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/9439/zufall-v6.html. (Zugriff: 6.5.2018).
- Hausten, A.; Kehnscherper, J.; Mochmann, W. (1998): Weltreligionen. Was ist was, Bd. 105. Nürnberg: Tessloff.
- Kant, I. (1838): Immanuel Kant's Werke: Schriften zur Philosophie im Allgemeinen und zur Logik. Leipzig: Modes und Baumann.
- Kollhoff, S.; Caluori, F.; Peter-Koop, A. (2014): Zur Erfassung sprachlicher Einflüsse beim stochastischen Denken. In: Wassong, T.; Frischemeier, D.; Fischer, P.; Hochmuth, R.; Bender, P. (Hrsg.): Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using tools for learning mathematics and statistics. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, S. 209–221.
- Krüger, K.; Sill, H.-D.; Sikora, Ch. (2015): Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Kütting, H. (1994): Didaktik der Stochastik. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 23. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
- Kütting, H.; Sauer, M. J. (2014): Elementare Stochastik, 3. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Lindenau, V.; Schindler, M. (1977): Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe und Sekundarstufe I. Mathematik in der Unterrichtspraxis. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.
- Meyer, E. (1910/2016): Kleine Schriften zur Geschichtstheorie und zur wirtschaftlichen und politischen Geschichte des Altertums. Halle: Niemeyer. Reprint: Miami: Book on Demand.
- Mühlbauer, P. (2015): Pentagon erklärt IS-Chefhacker für wahrscheinlich tot. www.heise.de/tp/features/Pentagon-erklart-IS-Chefhacker-fuer-wahrscheinlich-tot-3375110.html. (Zugriff: 6.5.2018).
- Neundorf, W. (o. D.): Wie zufällig ist der Zufall? Prognostizier- und Reproduzierbarkeit. www.neundorf.de/Zufall/Prognostizierbarkeit/prognostizierbarkeit.html. (Zugriff: 6.5.2018).
- Reuband, K.-H. (2002): Subjektive Wahrscheinlichkeiten und Antwortmuster: der Einfluss von Personenbezug und Skalierungsart. In: *Zentralarchiv für Empirische Sozialforschung* 50, S. 46–58. www.ssoar.info/ssoar/handle/document/19907. (Zugriff: 6.5.2018).
- Richter, H. (1956/1966): Wahrscheinlichkeitstheorie (2., neubearbeitete Auflage 1966). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Sill, H.-D. (1993): Zum Zufallsbegriff in der stochastischen Allgemeinbildung. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 25(2), S. 84–88.
- Schneider, I. (Hrsg.) (1989): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933: Einführungen und Texte. Berlin: Akademie-Verlag.
- Spandaw, J. (2013): Was bedeutet der Begriff „Wahrscheinlichkeit“? In: Rathgeb, M.; Helmerich, M.; Krömer, R.; Lengnink, K.; Nickel, G. (Hrsg.): *Mathematik im Prozess – Philosophische, Historische und Didaktische Perspektiven*, S. 41–55.
- Steinbring, H. (1991): The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. In: *Educational Studies in Mathematics* 22(6), S. 503–522.
- Van der Waerden, B. L. (1951): Der Begriff der Wahrscheinlichkeit. In: *Studium Generale: Zeitschrift für interdisziplinäre Studien* 4(2), S. 65–68.
- Wahrig-Brockhaus (2012): Wörterbuch der deutschen Sprache. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.
- Walter, F. (1980): Wider Münze und Würfel. In: *Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht* 33(5), S. 293–297.
- Weichselberger, K. (2001): Elementare Grundbegriffe einer allgemeineren Wahrscheinlichkeitsrechnung I. Heidelberg: Physica-Verlag.

Anschrift der Verfasser

Alexandra Prechtl
Herriedener Straße 46
90449 Nürnberg
ala.prechtl@web.de

Nicolai von Schroeders
Didaktik der Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Regensburger Straße 160
90478 Nürnberg
nicolai.von.schroeders@fau.de